



Análise tempo-frequência de Sinais via Frames de Gabor e Estatística de Alta Ordem: Um enfoque computacional

Time-Frequency Analysis of Signals via Gabor Frames and High Order Statistics: A Computational Approach

Nivea Maria Barreto Nunes Oleques¹, Vera Lúcia Duarte Ferreira², Thiago Rêgo³,
Fernando Luis Dias⁴

RESUMO: Este artigo apresenta um estudo sobre os aspectos aplicados e computacionais da análise harmônica restrita a problemas de processamento de sinais. Tal estudo, constitui-se numa pesquisa em fase de desenvolvimento no Curso de Pós Graduação em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação na Universidade Federal do Pampa, campus Bagé, e tem como objetivo a modelagem computacional da análise tempo-frequência de sinais utilizando frames de Gabor ajustados localmente por estimativas de estatísticas de alta ordem via cumulantes. Trata-se da primeira parte da pesquisa na qual os principais elementos da teoria foram elencados possibilitando conexões entre aspectos teóricos e experimentais. Nesse sentido, são apresentados testes computacionais padrão envolvendo sinais sintéticos com características estacionárias e não-estacionárias.

Palavras chave: Análise Fourier Local, Estacionaridade de Sinais, Estimativas Estatísticas

ABSTRACT: *This paper presents a study on the computational and applied aspects of harmonic analysis restricted to signal processing problems. Such study is a research in the development from the postgraduate course in Computational Modeling in Teaching, Experimentation and Simulation at the Federal University of Pampa, Campus Bagé. It has as objective the computational modeling of time-frequency analysis of signals using Gabor frames locally adjusted by estimates of high order statistics via cumulants. This is the first part of the research in which the main theory elements were listed, enabling connections between theoretical and*

experimental aspects. In this sense, standard computational tests involving synthetic signals with stationary and non-stationary characteristics are presented.

Keywords: *Local Fourier Analysis, Signal Stationary, Statistical Estimates*

1. INTRODUÇÃO

A análise tempo-frequência (*Time-Frequency Analysis* – TFA) é um ramo moderno da Análise Harmônica que remonta aos primórdios do desenvolvimento da mecânica quântica, em 1930, por H. Weyl, E. Wigner e J. Von Neumann, e também ao início da teoria da informação e análise de sinais por D. Gabor, com seu artigo *Theory of Communication* publicado em 1946 (GABOR, 1946; GRÖCHENIG, 2001). Sob o ponto de vista da análise clássica de Fourier, que tem por objetivo passar do domínio físico para o domínio da frequência via transformada de Fourier (*Fourier transform* - TF) (OPPENHEIM, 1997), a TFA pode ser vista como uma análise local no intuito de mapear informações do domínio do tempo no plano tempo-frequência, como é o caso da transformada de Fourier janelada (*short-time Fourier transform* - STFT). Tal análise permite rastrear a evolução do conteúdo de frequências por justaposição das análises locais. Porém, por ser uma extensão da análise espectral clássica de Fourier ao plano tempo-frequência (espaço de fase), a TFA apresenta como uma de suas principais limitações a resolução conjunta em todo plano tempo-frequência. O que implica que as análises tempo-frequência via STFT devem satisfazer o princípio da incerteza de Gabor-Heisenberg (DONOHO, 1989; GRÖCHENIG, 2001; XIUMEI, 2012).

Na teoria de processamento de sinais a análise tempo-frequência é muito utilizada no estudo de sinais não estacionários e sinais transientes. Destacando-se a STFT e a Wavelet (COHEN, 1989; DAUBECHIES, 1992; FLANDRIN, 1998; SANDSTEN, 2013). A primeira, possui certas limitações devido à escolha *a priori* da janela e ao princípio de incerteza de Gabor-Heisenberg. Por sua vez a segunda, tem a vantagem de possuir ajuste de escala e dilatação permitindo resoluções de

frequência e localização no tempo gerando um único gráfico no domínio tempo-escala.

Visando minimizar as limitações inerentes a STFT, Jones-Baraniuk (BARANIUK, 1992; BARANIUK, 1993; BARANIUK, 1994) apresenta uma técnica simples e computacionalmente eficiente para a construção de esquemas STFT otimizados pelo controle do núcleo da transformada via parâmetros de concentração.

LEE (2013), apresenta um esquema de STFT com ajuste da janela da transformada controlada pela curtose local denominando tal esquema STFT de *variable short-time Fourier transform* (VSTFT), aplicando-o a sinais de vibrações. Na mesma direção dos trabalhos anteriores, DIAS (2014) em sua tese de doutorado intitulada “Um esquema de Fourier local para análise tempo-frequência de sinais não estacionários aplicado a ruído eletroquímico” propõe um esquema VSTFT com ajuste do suporte da janela controlado pelas estimativas locais do quarto cumulante normalizado.

A presente pesquisa tem por objetivo a modelagem computacional da análise tempo-frequência de sinais utilizando frames de Gabor ajustados localmente por estimativas de estatísticas de alta ordem via cumulantes, de acordo com o esquema apresentado por DIAS (2014).

Vale comentar que, essa pesquisa está sendo realizada no Curso de Pós Graduação Especialização em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação na Universidade Federal do Pampa, campus Bagé-RS.

Nesse contexto, este trabalho apresenta a primeira parte da pesquisa supracitada. Para tal, foram realizados alguns experimentos com sinais sintéticos estacionários e, posteriormente a introdução de termos transientes que devidamente localizados, visam perturbar as condições de estacionaridade.

2. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

No âmbito da Análise Harmônica (AH) o conjunto dos números reais é um grupo localmente compacto. E, a análise de Fourier clássica dá-se sobre um grupo

abeliano localmente compacto, onde a linha reta real é pensada como um grupo munido da operação adição, possuindo uma topologia usual induzida por seus intervalos (abertos, fechados, compactos, etc.) e um sistema de vizinhanças compactas (STANKOVIC, 2005). A análise tempo-frequência, por sua vez, é definida sobre o grupo de Heisenberg (GRÖCHENIG, 2001; FEICHTINGER, 2012), tendo como caso particular a análise de Gabor que abrange a análise local de Fourier dada pela STFT. Mapeamentos do domínio do tempo para o plano tempo-frequência utilizando a transformada de Fourier são produzidos por translações em tempo e modulação em frequências, também conhecidos como *time-frequency shifts*, que ao agir sobre a função quadrado integrável definem os chamados frames de Gabor, cuja existência é assegurada somente sob certas condições dos *shifts* e da função janela (CASAZZA, 2000; FEICHTINGER 2012; CHRISTENSEN, 2014, IOSEVICH, 2015; LYNCH, 2016). Neste contexto, a modelagem computacional dos frames de Gabor ajustados localmente via estatísticas de alta ordem poderá contribuir para o aumento da resolução dos espectrogramas resultantes das análises tempo-frequência utilizando os esquemas VSTFT.

A STFT de um determinado sinal $s(t)$ é dada por,

$$STFT_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (1)$$

onde τ é a translação em tempo da janela g e j é a unidade imaginária dada por $\sqrt{-1}$. Um esquema da análise local de Fourier é apresentado na Fig. 1.

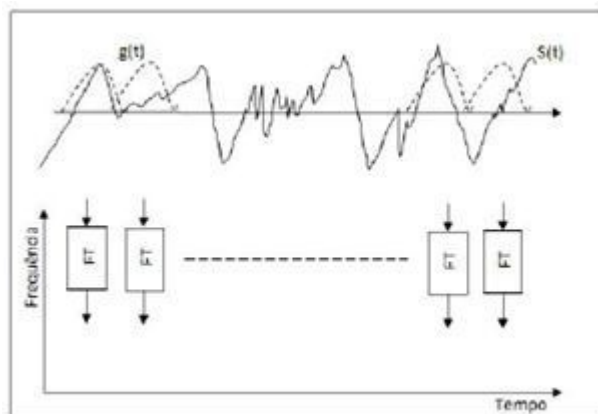


Figura 1 – Análise de Fourier Local

Fonte: Dias et al. (2015)

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

No decurso do projeto ter-se-á especial dedicação ao estudo do referencial teórico, destacando os resultados matemáticos fundamentais para a modelagem computacional dos *frames* de Gabor.

Tomando as referências (GRÖCHENIG, 2001; MUMFORD, 2010; DIAS, 2014), a elaboração do esquema de Fourier para a análise tempo-frequência será realizada usando os *time-frequency shifts* em espaços de Hilbert. A modelagem computacional do ajuste dos *frames* será elaborada, a implementação computacional do esquema VSTFT será executada, e os espectrogramas e perfis de curtose serão analisados.

Motivado pelos resultados iniciais sobre a análise tempo-frequência de sinais ambientais (KALAS et. al, 2016), sinais de células fotovoltaicas (RÊGO et. al, 2016) e sinais de acústica (FERREIRA et. al, 2015), serão realizados testes computacionais visando à consolidação de tais resultados. Testes e simulações com sinais sintéticos contendo ruído branco também serão efetuados para avaliar a robustez dos esquemas VSTFT na análise de sinais gerados por fontes acústicas. Na continuação, testes levando em consideração a variação da relação sinal ruído serão simulados. A qualidade da resolução dos espectrogramas dos sinais testados indicará a necessidade ou não do pré-processamento dos dados via filtros.

4. Resultados Numéricos

Com o *software Scilab*, foram gerados os sinais sintéticos caracterizados como estacionários e não estacionários. Nessa primeira etapa da pesquisa, a análise e o processamentos dos sinais em questão, foi realizada utilizando a Transformada de Fourier.

As Figuras 1 e 2 mostram dois sinais sintéticos gerados computacionalmente e seus respectivos espectros obtidos via TF. O sinal estacionário, Fig. 1, foi gerado pela equação:

$$s(t) = \cos(2\pi 10t) + 4^3 \cos(2\pi 50t) + 2^1 \cos(2\pi 100t) \quad (2)$$

Foi amostrado a 1000 amostras por segundo, entre os instantes de tempo $t_1 = 0,25s$, $t_2 = 0,50s$, $t_3 = 0,75s$ e $t_4 = 1s$.

Na Figura 2 é apresentado um sinal não-estacionário, gerado pela composição do sinal $S(t)$, da Fig. 1, com um $\cos(t)$.

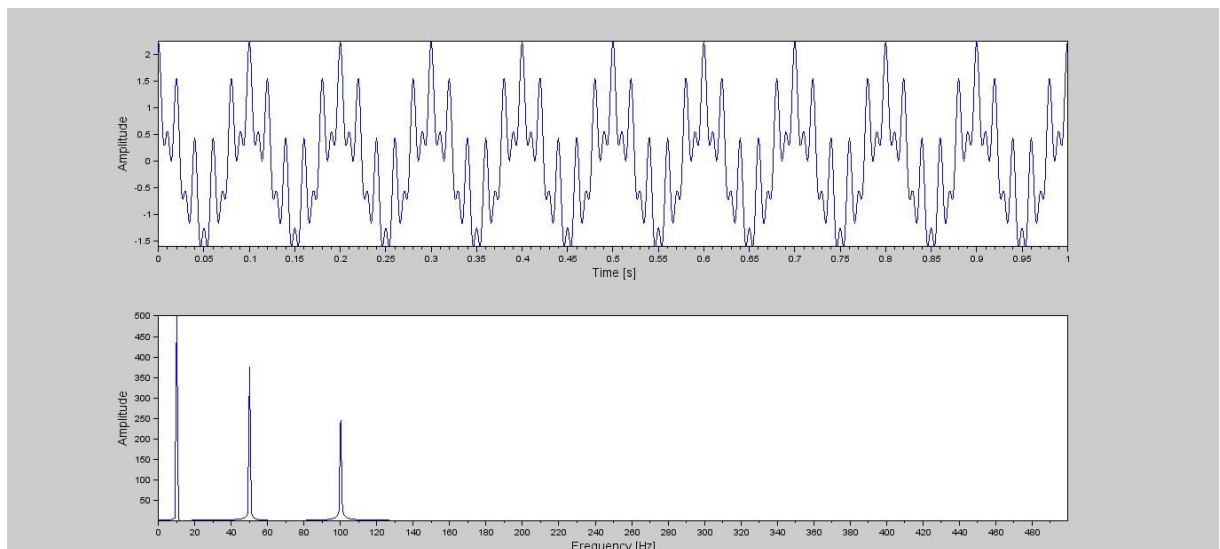


Figura 1 - Sinal estacionário com dois transiente e o espectro correspondente

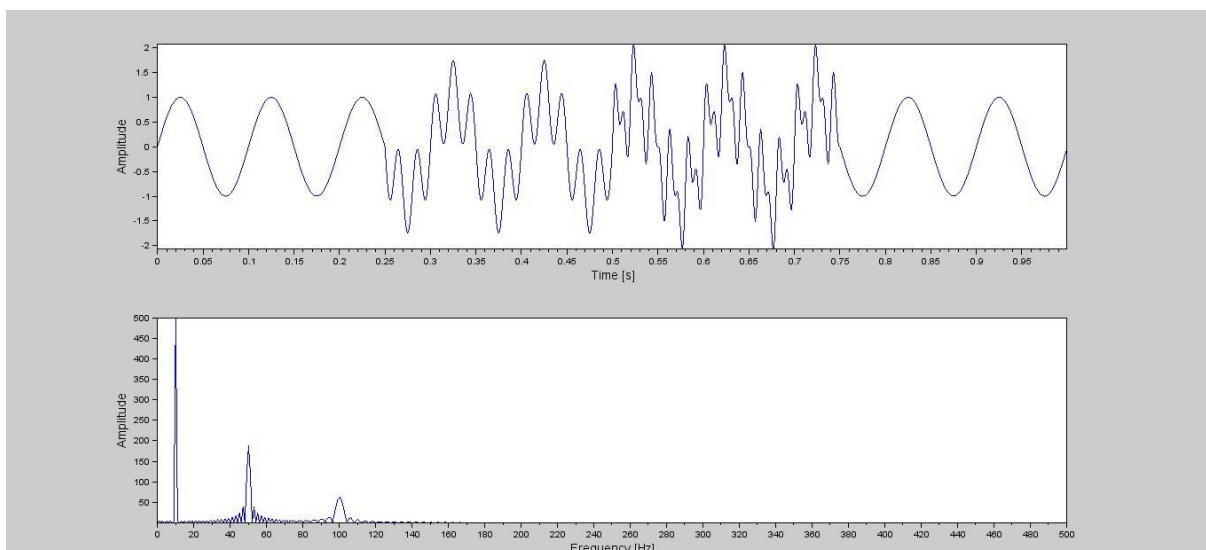


Figura 2 - Sinal não estacionário e o espectro correspondente

4. CONCLUSÕES

A partir da descrição do problema, do ponto vista teórico e de suas motivações práticas, o desenvolvimento da pesquisa contempla aspectos tanto de fundamentos quanto das aplicações. A fundamentação da pesquisa foi delineada a partir da colocação do problema matemático num contexto abstrato, valendo-se da riqueza da estrutura dos grupos abelianos localmente compactos e da existência em tais grupos de uma medida invariante sob translação, chamada medida de Haar. O entendimento das propriedades dessa medida permite definir a transformada de Fourier na linha reta real. Permitindo avançar no entendimento de resultados fundamentais na análise de Fourier local.

Por outro lado, limitações quanto a identificação de regimes de frequência variantes no tempo mostram que a busca de informações via mapeamento do espaço físico para o espaço das frequências não são eficazes para obtenção da energia do sinal.

REFERÊNCIAS

- [1] BARANIUK, Richard G.; JONES, Douglas L. A **signal-dependent time-frequency representation: Optimal kernel design**. *IEEE Transactions on signal processing*, v. 41, n. 4, p. 1589-1602, 1993.
- [2] CHRISTENSEN, O. **A short introduction to frames, Gabor systems, and wavelet systems**. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 4(1), 25-39. 2014.
- [3] COHEN, Leon. **Time-frequency distributions-a review**. *Proceedings of the IEEE*, v. 77, n. 7, p. 941-981, 1989.
- [4] DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. Philadelphia: SIAM, v. 61. 1992.
- [5] DAVID, L. DONOHO and Philip B. **Stark Uncertainty Principles and Signal Recovery**. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 49, No. 3, p. 906-931, 1989.
- [6] DIAS, F. L. **Um esquema de Fourier local para análise tempo-frequência de sinais não estacionários aplicado a ruído eletroquímico**. 169 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, UERJ. 2014.
- [7] DUFFIN, R., SCHAEFFER, A., **A class of nonharmonic Fourier series**, *Tran. Amer. Math. Soc.* 72, 341–366, 1952.
- [8] FEICHTINGER, H.; LUEF, Franz. **Gabor analysis and time-frequency methods**. *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, 2012.
- [9] FERREIRA, V.L.D.; DIAS, F.L.; TENENBAUM, R.A.; SANTOS, L.R. **Mapeamento tempo-frequência de sinais de acústica de salas**. *Anais do XVIII Encontro*

Nacional de Modelagem Computacional e VI Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, Salvador, BA, 2015.

[10] FLANDRIN, Patrick. **Time-frequency/time-scale analysis**. Academic press, 1998.

[11] GABOR, D.. **Theory of communication**. J. IEE, p. 429–457, 1946.

[12] GRÖCHENING, K. **Foundations of time-frequency analysis**. Springer, 359 p. 2001.

[13] IOSEVICH, Alex; MAYELI, Azita. **Exponential bases, Paley–Wiener spaces and applications**. Journal of Functional Analysis, v. 268, n. 2, p. 363-375, 2015.

[14] JONES, Douglas L.; BARANIUK, Richard G. **A simple scheme for adapting time-frequency representations**. IEEE Transactions on Signal Processing, v. 42, n.

12, p. 3530-3535, 1994.

[15] JONES, D. L.; Baraniuk; R. G. **A simple scheme for adapting time-frequency representations**. In **Time-Frequency and Time-Scale Analysis**, Proceedings of the IEEE-SP International Symposium, p. 83-86, 1992.

[16] KALAS, F., DIAS, F., FERREIRA, V. **Identificação De Evento Extremo De Precipitação Via Técnica De Mapeamento Tempo-Frequência**. RETEC - Revista de Tecnologias, v. 9, 2016.

- [17] LEE, J. Y. **Variable short-time Fourier Transform for vibration signals with transients**. Journal of Vibration and Control. Doi: 10.1177/1077546313499389p. 1-15. 2013.
- [18] LI, Xiumei; BI, Guoan; LI, Shenghong. **On uncertainty principle of the local polynomial Fourier transform**. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, v. 2012, n. 1, p. 120, 2012.
- [19] LYNCH, R. G. **Subsequences of frames and their operators**. Tese de Doutorado. U. Missouri, 2016.
- [20] MUMFORD, David; DESOLNEUX, Agnès. **Pattern theory: the stochastic analysis of real-world signals**. CRC Press, 2010.
- [21] OPPENHEIM, A.V.; WILLSKY, A. S.; YOUNG, I. **Signals and systems**. Prentice-Hall International, Inc., 947 p. 1997.
- [22] RÊGO, T.C; DIAS, F.L.; PARIZZI, J.B.; KALAS, F.A.; FERREIRA, V.L. **Identificação de eventos de sombreamento em painéis fotovoltaicos via técnicas de mapeamento tempo-frequência**. 10º Simpósio Internacional de **Qualidade Ambiental** – ABES, Porto Alegre, 2016.
- [23] SANDSTEN, MARIA. **Time-Frequency Analysis of Non-Stationary Processes**. PhD Thesis, 2013.

- [24] STANKOVIC, Radomir S.; ASTOLA, Jaakko T.; KARPOVSKY, Mark G. **Remarks on History of Abstract Harmonic Analysis.** In: Proceedings of 2005 International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP 2005.